# 模块五 零点与不等式

## 第 1 节 函数零点小题策略：不含参（★★☆）

### 强化训练

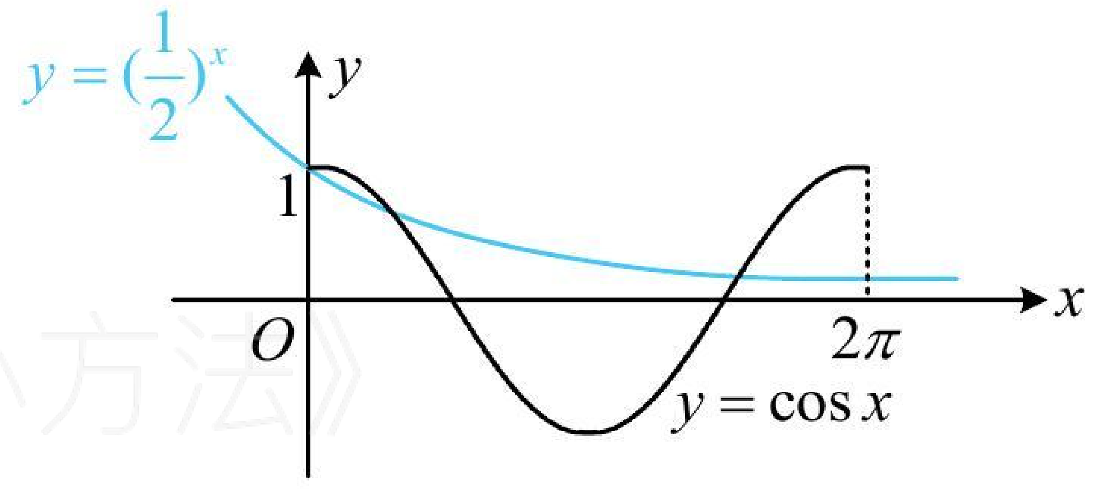
1．（2022·四川模拟·★★）已知函数 $f(x)=(\frac{1}{2})^x-\cos x$，则 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的零点个数为（　　）

（A）4　（B）3　（C）2　（D）1

答案：B

解析：将 $f(x)=0$ 变形，便于作图分析交点个数，$f(x)=0\Leftrightarrow(\frac{1}{2})^x=\cos x$，

作出 $y=(\frac{1}{2})^x$ 和 $y=\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象如图，两图象有 3 个交点 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有 3 个零点.






2．（2023·全国甲卷·★★★）已知 $f(x)$ 为函数 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后所得图象的函数，则 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的交点个数为（　　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

答案：C

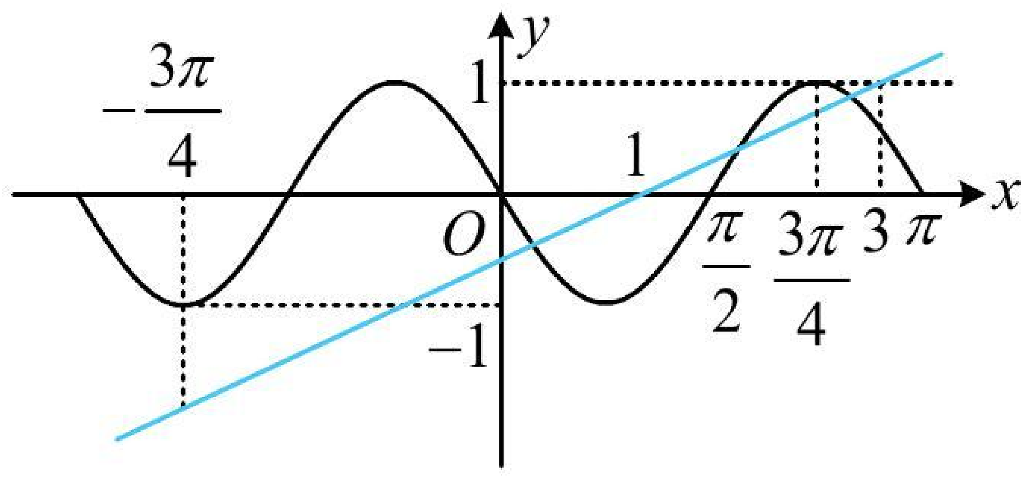
解析：由题意，$f(x)=\cos[2(x+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=\cos(2x+\frac{\pi}{2})$

$=-\sin 2x$，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$，

如图，容易看出 $y$ 轴左侧二者没有交点，而 $y$ 轴右侧，$y=-\sin 2x$ 在直线 $y=1$ 上方没有图象，故可抓住蓝色直线穿出 $y=1$ 的位置来分析，

在 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 中令 $y=1$ 可得 $x=3$，如图，$\frac{3\pi}{4}<3<\pi$，

所以直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 与 $f(x)$ 的图象共 3 个交点.




3．（★★★）设 $f(x)=\begin{cases} e^x+1, x\ge 0 \\ |x^2+2x|, x<0 \end{cases}$，则 $g(x)=f(x)-ex-1$ 的零点个数为（　　）

（A）4　（B）3　（C）2　（D）1

答案：C

解析：分段函数研究零点个数，可分段考虑，

当 $x\ge 0$ 时，$g(x)=f(x)-ex-1=e^x-ex$，所以 $g(x)=0\Leftrightarrow e^x=ex$，接下来借助图象分析交点，

如图 1，直线 $y=ex$ 与曲线 $y=e^x$ 正好相切于 $x=1$ 处，它们只有 1 个交点 $\Rightarrow g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有 1 个零点；

当 $x<0$ 时，$g(x)=0\Leftrightarrow |x^2+2x|=ex+1$，此方程不易求解，故作图看交点，

如图 2，由图可知直线 $y=ex+1$ 与函数 $y=|x^2+2x|(x<0)$ 的图象有 1 个交点，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有 1 个零点，故 $g(x)$ 共有 2 个零点.

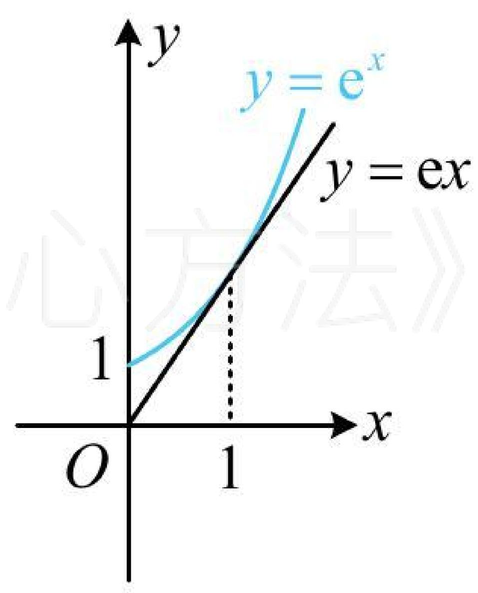



图1



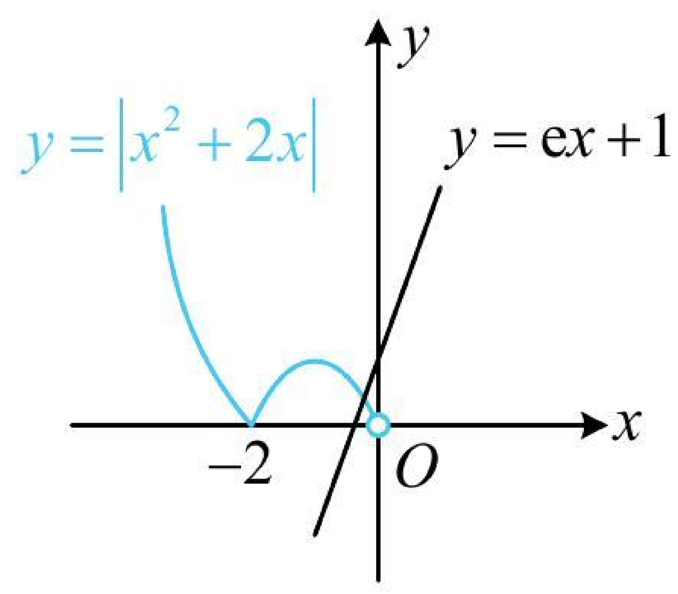



图2

【反思】本题若将 $g(x)=f(x)-ex-1$ 换成 $g(x)=f(x)-3x-1$，你会做吗？在 $[0,+\infty)$ 上，原来的曲线 $y=e^x$ 的切线 $y=ex$ 变成割线 $y=3x$，如图 3，交点增加 1 个.

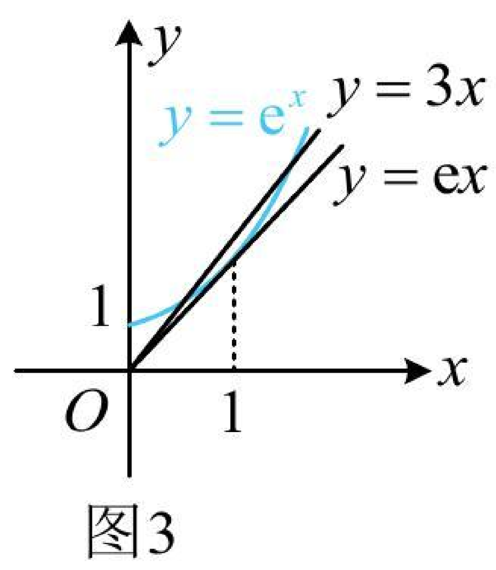



图3

4．（2023•绵阳二诊•★★★）若函数 $f(x)=\begin{cases} 2+\ln x, x>0 \\ x, x\le 0 \end{cases}$，$g(x)=f(x)+f(-x)$，则函数 $g(x)$ 的零点个数为_____.

答案：5

解析：若先求 $g(x)$ 的解析式，再来分析零点，则较麻烦，注意到 $g(x)$ 为偶函数，故可用对称性来简化分析，

因为 $g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$，所以 $g(x)$ 为偶函数，下面先看 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的零点个数，

首先，$g(0)=2f(0)=0$，所以 0 是 $g(x)$ 的一个零点，

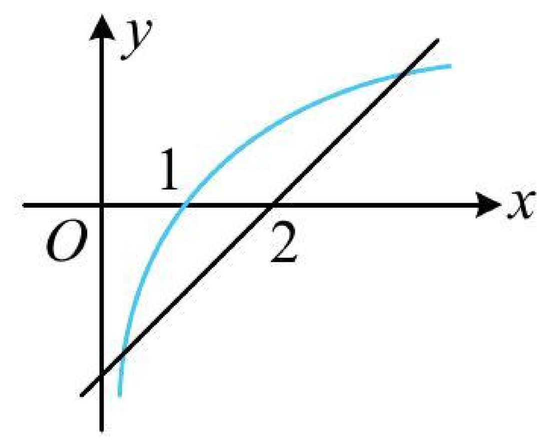
其次，当 $x>0$ 时，$-x<0$，所以 $g(x)=f(x)+f(-x)=2+\ln x+(-x)=2+\ln x-x$，

此时零点无法求出，故变形后画图看交点，

$g(x)=0\Leftrightarrow x-2=\ln x$，函数 $y=x-2$ 和 $y=\ln x$ 的大致图象如图，由图可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个零点，

结合偶函数的图象关于 $y$ 轴对称可知 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有 2 个零点；

综上所述，$g(x)$ 共有 5 个零点.




**【反思】** 遇见 $f(x)\pm f(-x)$ 这类函数，一般可先分析其奇偶性，把研究的范围缩小在 $[0,+\infty)$ 上. 后面还会遇到.

5.（2022•南昌模拟•★★★★）定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)+f(x)=0$，$f(x)=f(2-x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2$，则函数 $y=7f(x)-x+2$ 的所有零点之和为（　　）

（A）7　（B）14　（C）21　（D）28

**答案**：B



**解析**：$7f(x)-x+2=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x-2}{7}$，为了作图，先由已知条件分析 $f(x)$ 的性质，

$f(-x)+f(x)=0\Rightarrow f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 的图象关于原点对称，

又 $f(x)=f(2-x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，从而 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，

结合当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2$ 可作出 $f(x)$ 的图象如图，

注意到 $f(x)$ 只在直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间有图象，故作图时注意直线 $y=\dfrac{x-2}{7}$ 穿出此两水平线的位置，

由图可知两图象有 $A$，$B$，$C$，$D$，$E$，$F$，$G$ 共 7 个交点，

因为两个图象都关于点 $(2,0)$ 对称，所以它们的交点也关于点 $(2,0)$ 对称，

从而 $A$ 与 $G$，$B$ 与 $F$，$C$ 与 $E$ 都关于点 $D(2,0)$ 对称，故 $\dfrac{x_A+x_G}{2}=2$，$\dfrac{x_B+x_F}{2}=2$，$\dfrac{x_C+x_E}{2}=2$，

所以 $x_A+x_B+x_C+x_D+x_E+x_F+x_G=4\times3+2=14$，即函数 $y=7f(x)-x+2$ 的所有零点之和为 14.